УДК 519.718

М. А. Алехина, С. П. Каргин

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМЫ В БАЗИСЕ РОССЕРА – ТУРКЕТТА В P_4[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Многозначная логика предоставляет широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач. Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработки сложных цифровых сигналов и т.д. Определенный интерес представляет задача исследования надежности функционирования схем в полном конечном базисе из k-значных функций ($k \geq 3$). Задача построения надежных схем в произвольном полном базисе из трехзначных функций (т.е. при $k = 3$) решена в диссертации О. Ю. Барсуковой. Цель работы – построить асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта при $k = 4$.

Результаты. Найдена схема, которую можно использовать для повышения надежности исходных схем, получено рекуррентное соотношение для ненадежностей исходной схемы и предлагаемой схемы. Описан метод синтеза надежных схем, получена верхняя оценка ненадежности схем. Описан класс функций K, содержащий почти все четырехзначные функции, и доказана нижняя оценка ненадежности схем, реализующих функции из этого класса. Для функции из класса K построена схема, верхняя и нижняя оценки ненадежности которой асимптотически равны.

Выводы. Почти любую функцию четырехзначной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой.

Ключевые слова: функции четырехзначной логики, ненадежные функциональные элементы, синтез схем из ненадежных элементов.

M. A. Alekhina, S. P. Kargin

ASYMPTOTIC RELIABILITY-OPTIMAL CIRCUITS IN THE ROSSER-TURKETT BASIS IN P_4

Abstract.

Background. The multivalued logic offers ample opportunities for various algorithms development in multiple fields. It allows to decrease both the computational complexity and the magnitude, a number of connections in various arithmetic and logic units, to increase the density of gate placement on circuits, to find alternative methods of problem solving. Already nowadays the multivalued logic is successfully applied for solution of multiple problems and in many technological developments. The latter include various arithmetical devices, systems of artificial intelligence and data processing, complex digital signal processing etc. The research of reliability of circuit functioning in the complete finite basis from k-valued functions

[1] Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00273).

($k \geq 3$) is of certain interest. The problem of reliable circuit building in a random complete basis from three-valued functions (i.e. $k = 3$) has been solved in the thesis work by O.Yu. Barsukova. The aim of the work is to build asymptotically reliability-optimal circuits in the Rosser-Turkett basis at $k = 4$.

Results. The authors found a circuit that may be used to increase the reliability of initial circuits, obtained a recurrent correlation for unreliabilities of the initial circuit and the estimated circuit. The researchers described the method of reliable circuits synthesis, obtained the upper estimate of circuit unreliability. The article describes K class functions, containing almost all four-valued functions, proves the lower estimate of circuit unreliability, realizing function of the said class. For the K class functions the authors built a circuit, the lower and upper estimates of which are asymptotically equal.

Cocnlusions. Almost any function of four-valued logic may be realized by an asymptotically reliability-optimal circuit.

Key words: four-valued logic functions, unreliable functional gates, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Это исторически сложившееся положение предопределено ее сравнительной простотой и сделало ее применение предпочтительным (в сравнении с другими логическими системами) с технической и экономической точек зрения. Основные модельные объекты, работающие на основе двузначной логики (например, схемы из ненадежных элементов [1–3], неветвящиеся программы [4]) на данный момент являются хорошо изученными. Однако сложность решаемых задач, а следовательно и технических устройств, постоянно возрастает.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач.

Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т.д.

В работе [5] описан функционально полный в P_3 базис, в котором на компромиссной основе согласованы математические и технические (МДП-техники) требования и интересы; а также рассмотрены некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе. В работе [6] построен функционально полный в P_4 базис, реализуемый в МОП-структурах. В работе [7] описаны свойства четырехзначных функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, и изложен соответствующий метод синтеза.

Таким образом, определенный интерес представляет задача исследования надежности функционирования схем в полном конечном базисе из k-значных функций ($k \geq 3$). Задача построения надежных схем в произвольном полном базисе из трехзначных функций (т.е. $k = 3$) решена в диссертации

О. Ю. Барсуковой [8], а в работе [9] решена задача синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем в базисе Россера – Туркетта при $k = 3$.

Цель данной работы – построить асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта при $k = 4$.

Постановка задачи

Пусть $n \in \mathbf{N}$, а P_4 – множество всех функций четырехзначной логики, т.е. функций $f(x_1,...,x_n):\{0,1,2,3\}^n \to \{0,1,2,3\}$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_4 схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе Россера – Туркетта $\{0,1,2,3,J_0(x_1),J_1(x_1),J_2(x_1),J_3(x_1),$ $\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}\}$ ($\min\{x_1,x_2\}$ будем также обозначать через &, а $\max\{x_1,x_2\}$ – через $\vee$ [10]).

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1,...,x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S,\tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i ($i \in \{0,1,2,3\}$) на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n)$ – вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S,\tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S,\tilde{a}^n) + P_{\tau+3}(S,\tilde{a}^n),$$

в выражениях $\tau+1$, $\tau+2$ и $\tau+3$ сложение осуществляется по $\bmod 4$.

Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$, то вероятность появления ошибки на этом наборе равна

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S,\tilde{a}^n) = P_1(S,\tilde{a}^n) + P_2(S,\tilde{a}^n) + P_3(S,\tilde{a}^n).$$

Ненадежностью схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть число $P(S)$, равное наибольшей из вероятностей появления ошибки на выходе схемы S. *Надежность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Предполагается, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0,1/6)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах, т.е. каждый базисный элемент с функцией $\varphi(\tilde{x}^k)$ ($k \in \{1,2\}$) на любом входном наборе $\tilde{a}^k$ таком, что $\varphi(\tilde{a}^k) = \tau$, с вероятностью ε выдает значение $\tau+1 \pmod 4$, с вероятностью ε выдает значение $\tau+2 \pmod 4$ и с вероятностью ε выдает значение $\tau+3 \pmod 4$. Очевидно, что ненадежность любого базисного элемента равна 3ε, а надежность – $(1-3\varepsilon)$.

Рекуррентное соотношение

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – функция из P_4, а S – любая схема, реализующая функцию f. Покажем, каким образом по схеме S построить схему, которая реализует ту же функцию f, но, возможно (при некоторых условиях на $P(S)$), более надежно. Для этого возьмем четыре экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами базисного элемента E, реализующего функцию $\&$. Полученную схему назовем схемой *D*. Далее возьмем два экземпляра схемы *D* и соединим их выходы со входами базисного элемента E, реализующего функцию $\vee$. Новую схему обозначим $\psi(S)$. Нетрудно проверить, что $\psi(S)$ реализует ту же функцию f.

В теореме 1 найдено рекуррентное соотношение для ненадежностей схем S и $\psi(S)$.

Теорема 1. Пусть f – произвольная функция из P_4, S – любая схема, реализующая f, а $P(S)$ – ненадежность схемы S. Тогда схема $\psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью $P(\psi(S))$, удовлетворяющей неравенству $P(\psi(S)) \le 9\varepsilon + 36\varepsilon P(S) + 6P^2(S)$.

Доказательство. Пусть f – произвольная функция. Без ограничения общности можно считать, что f зависит от переменных $x_1,...,x_n$. Пусть S – любая схема, реализующая f, $\tilde{a}^n$ – произвольный набор, $f(\tilde{a}^n)=\tau$. Обозначим через p вероятность появления ошибки $P_{f(\tilde{a}^n)\ne\tau}(S,\tilde{a}^n)$ на выходе схемы S (т.е. $p = P_{f(\tilde{a}^n)\ne\tau}(S,\tilde{a}^n)$) и найдем вероятность ошибки на выходе схемы $\psi(S)$ на этом же наборе, учитывая, что ненадежность подсхемы из трех элементов (двух конъюнкторов и одного дизъюнктора) не более 9ε:

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne\tau}(\psi(S),\tilde{a}^n) \le (1-p)^4 \cdot 9\varepsilon + 4p(1-p)^3 \cdot 9\varepsilon + \sum_{i=2}^{4} C_4^i (1-p)^{4-i} p^i.$$

Найдем верхнюю оценку выражения

$$\sum_{i=2}^{4} C_4^i (1-p)^{4-i} p^i :$$

$$\sum_{i=2}^{4} C_4^i (1-p)^{4-i} p^i = 6p^2(1-2p+p^2) + 4p^3(1-p) + p^4 = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4 \le 6p^2$$

при всех $p \in [0,1]$.

Тогда

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne\tau}(\psi(S),\tilde{a}^n) \le 9\varepsilon + 36p\varepsilon + 6p^2.$$

Следовательно, $P(\psi(S)) \le 9\varepsilon + 36\varepsilon P(S) + 6P^2(S)$.

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, получим верхнюю оценку ненадежности схем.

Верхняя оценка ненадежности схем

Лемма 1. При любом $n \in \mathbf{N}$ любую функцию $f(x_1,...,x_k,...,x_n)$ можно представить следующим образом:

1) при $k=1$:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = J_0(x_1)\,\&\, f(0,x_2,...x_n) \vee J_1(x_1)\,\&\, f(1,x_2,...x_n) \vee$$
$$\vee J_2(x_1)\,\&\, f(2,x_2,...,x_n) \vee J_3(x_1)\,\&\, f(3,x_2,...,x_n);$$

2) при $k \in \{2, ..., n-1\}$:

$$f(x_1,...,x_{k-1},x_k,x_{k+1},...,x_n) = J_0(x_k)\,\&\, f(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n) \vee$$
$$\vee J_1(x_k)\,\&\, f(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n) \vee J_2(x_k)\,\&\, f(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n) \vee$$
$$\vee J_3(x_k)\,\&\, f(x_1,...,x_{k-1},3,x_{k+1},...,x_n);$$

3) при $k=n$:

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = J_0(x_n)\,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},0) \vee J_1(x_n)\,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},1) \vee$$
$$\vee J_2(x_n)\,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},2) \vee J_3(x_n)\,\&\, f(x_1,...,x_{n-1},3).$$

Теорема 2. Любую функцию $f \in P_4$ можно реализовать такой схемой D', что при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$ верно неравенство $P(D') \le 11\varepsilon$.

Доказательство. Индукция по числу n переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

1. Докажем утверждение для $n=1$, т.е. для всех возможных функций $f(x)$, зависящих от одной переменной x. Представим функцию $f(x)$ в первой форме: $f(x) = J_0(x)\,\&\, f(0) \vee J_1(x)\,\&\, f(1) \vee J_2(x)\,\&\, f(2) \vee J_3(x)\,\&\, f(3)$.

Чтобы промоделировать эту формулу схемой (обозначим ее S'), потребуется не более 15 элементов. Поэтому ненаденжость $P(S')$ схемы S' удовлетворяет неравенству: $P(S') \le 45\varepsilon$.

По схеме S' построим схему $\psi(S')$. Используя теорему 1 и условие $\varepsilon \le 1/1000$, оценим ненадежность схемы $\psi(S')$:

$$P(\psi(S')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 45\varepsilon^2 + 6 \cdot 45^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 13770\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{13770}{1000}\varepsilon \le 23\varepsilon.$$

По схеме $\psi(S')$ построим схему $\psi^2(S')$. Используя теорему 1 и условие $\varepsilon \le 1/1000$, оценим ненадежность схемы $\psi^2(S')$:

$$P(\psi^2(S')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 23\varepsilon^2 + 6 \cdot 23^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 1680\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{1680}{1000}\varepsilon \le 10{,}68\varepsilon \le 11\varepsilon.$$

Таким образом, для $n=1$ теорема верна.

2. Пусть утверждение теоремы верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ с числом переменных $(n-1)$. Докажем, что оно верно для функций $f(\tilde{x}^{n})$. Разложим функцию $f(x_1,...x_{n-1},x_n)$ по переменной x_n, используя лемму 1:

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = J_0(x_n)\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},0) \vee J_1(x_n)\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},1) \vee$$
$$\vee J_2(x_n)\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},2) \vee J_3(x_n)\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},3).$$

Используя это разложение, построим схему *C*, реализующую функцию $f(\tilde{x}^{n})$, причем S_0 – схема, реализующая функцию $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, S_1 – схема, реализующая функцию $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$; S_2 – схема, реализующая функцию $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$; S_3 – схема, реализующая функцию $f_3 = f(x_1,...,x_{n-1},3)$.

В схеме *C* выделим подсхему *A*, состоящую из 11 элементов, выход которой является выходом схемы *C*, а на входы подаются значения x_n, $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$, $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$ и $f_3 = f(x_1,...,x_{n-1},3)$.

Выделенная подсхема *A* состоит из 11 элементов, поэтому ее ненадежность $P(A) \le 33\varepsilon$. Функции $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$, $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$ $f_2 = f(x_1,...,x_{n-1},2)$ и $f_3 = f(x_1,...,x_{n-1},3)$ по индуктивному предположению можно реализовать такими схемами S_0, S_1, S_2 и S_3 соответственно, что ненадежность каждой из них не больше 11ε.

Если схема A исправна, то для реализации f она использует значение одной из схем, реализующих функции f_0, f_1, f_2 и f_3. Поэтому

$$P(C) \le P(A) + 11\varepsilon \le 33\varepsilon + 11\varepsilon = 44\varepsilon.$$

По схеме C построим схему $\psi(C)$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi(C)$, учитывая, что $\varepsilon \le \frac{1}{1000}$:

$$P(\psi(C)) \le 9\varepsilon + 36\cdot 44\varepsilon^2 + 6\cdot 44^2\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 13200\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{13200}{1000}\varepsilon \le 22{,}2\varepsilon.$$

По схеме $\psi(C)$ построим схему $\psi^2(C)$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi^2(C)$, учитывая, что $\varepsilon \le \frac{1}{1000}$:

$$P(\psi^2(C)) \le 9\varepsilon + 36\cdot 22{,}2\varepsilon^2 + 6\cdot(22{,}2)^2\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 3757\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{3757}{1000}\varepsilon \le 12{,}8\varepsilon.$$

По схеме $\psi^2(C)$ построим схему $\psi^3(C)$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi^3(C)$, учитывая, что $\varepsilon \le 1/1000$:

$$P(\psi^3(C)) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 12{,}8\varepsilon^2 + 6 \cdot (12{,}8)^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 1444\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{1444}{1000}\varepsilon \le 11\varepsilon.$$

Следовательно, схема $\psi^3(C)$ – искомая схема D'.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_4$ можно реализовать такой схемой D', что $P(D'') \le 9\varepsilon + 954\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$.

Доказательство. По теореме 2 любую функцию f можно реализовать схемой D' с ненадежностью $P(D') \le 11\varepsilon$. По схеме D' построим схему $\psi(D')$ и оценим ее ненадежность по теореме 1, учитывая, что $\varepsilon \le \dfrac{1}{1000}$:

$$P(\psi(D')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 11\varepsilon^2 + 6 \cdot 11^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 1122\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{1122}{1000}\varepsilon \le 10{,}122\varepsilon.$$

По схеме $\psi(D')$ построим схему $\psi^2(D')$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi^2(D')$, учитывая, что $\varepsilon \le 1/1000$:

$$P(\psi^2(D')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 10{,}122\varepsilon^2 + 6 \cdot (10{,}122)^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 979{,}13\varepsilon^2 \le 9{,}98\varepsilon.$$

По схеме $\psi^2(D')$ построим схему $\psi^3(D')$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi^3(D')$, учитывая, что $\varepsilon \le 1/1000$:

$$P(\psi^3(D')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 9{,}98\varepsilon^2 + 6 \cdot (9{,}98)^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 957\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + \frac{957}{1000}\varepsilon \le 9{,}957\varepsilon.$$

По схеме $\psi^3(D')$ построим схему $\psi^4(D')$. Воспользуемся соотношением из теоремы 1 и оценим ненадежность схемы $\psi^4(D')$, учитывая, что $\varepsilon \le 1/1000$:

$$P(\psi^4(D')) \le 9\varepsilon + 36 \cdot 9{,}957\varepsilon^2 + 6 \cdot (9{,}957)^2 \varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 953{,}31\varepsilon^2 \le 9\varepsilon + 954\varepsilon^2.$$

Следовательно, схема $\psi^4(D')$ – искомая схема D''.

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует, что любую функцию из P_4 можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 9ε.

Нижняя оценка ненадежности схем

Для получения нижних оценок ненадежности схем используется теорема 4.

Теорема 4. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция, которая принимает четыре значения 0, 1, 2, 3; S – любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема

A схемы S содержит выход схемы S и реализует функцию $\varphi(\tilde{y}^m)$ с ненадежностью $P(A) \le 1/2$. Пусть $p_0 = \min\limits_{\tilde{b}_0^m} P_{\varphi(\tilde{b}_0^m)\ne 0}(A, \tilde{b}_0^m)$, где $\tilde{b}_0{}^m$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_0{}^m) = 0$; $p_1 = \min\limits_{\tilde{b}_1{}^m} P_{\varphi(\tilde{b}_1{}^m)\ne 1}(A, \tilde{b}_1{}^m)$, где $\tilde{b}_1{}^m$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_1{}^m) = 1$; $p_2 = \min\limits_{\tilde{b}_2{}^m} P_{\varphi(\tilde{b}_2{}^m)\ne 2}(A, \tilde{b}_2{}^m)$, где $\tilde{b}_2{}^m$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_2{}^m) = 2$; $p_3 = \min\limits_{\tilde{b}_3{}^m} P_{\varphi(\tilde{b}_3{}^m)\ne 3}(A, \tilde{b}_3{}^m)$, где $\tilde{b}_3{}^m$ такой входной набор схемы A, что $\varphi(\tilde{b}_3{}^m) = 3$.

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам:

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne 0}(S, \tilde{a}^n) \ge p_0, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 0;$$

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne 1}(S, \tilde{a}^n) \ge p_1, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 1;$$

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne 2}(S, \tilde{a}^n) \ge p_2, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 2;$$

$$P_{f(\tilde{a}^n)\ne 3}(S, \tilde{a}^n) \ge p_3, \text{ если } f(\tilde{a}^n) = 3.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{a}^n$ такой входной набор схемы S, что $f(\tilde{a}^n) = 0$. В зависимости от набора $\tilde{a}^n$ и неисправностей в схеме на входы схемы A поступает некоторый набор длины m с компонентами из множества $\{0,1,2,3\}$. Обозначим множество всех таких наборов через $M(\tilde{a}^n)$. Разобьем множество $M(\tilde{a}^n)$ на подмножества $M_i(\tilde{a}^n) = \{\tilde{c}^m \mid \varphi(\tilde{c}^m) = i\}$, $i \in \{0,1,2,3\}$. Обозначим через $v_i(\tilde{a}^n)$ вероятность появления на входах схемы A набора из множества $M_i(\tilde{a}^n)$. Очевидно, что

$$v_i(\tilde{a}^n) \ge 0 \text{ и } v_0(\tilde{a}^n) + v_1(\tilde{a}^n) + v_2(\tilde{a}^n) + v_3(\tilde{a}^n) = 1.$$

Найдем вероятность $P_0(S, \tilde{a}^n)$ появления 0 на выходе схемы S:

$$P_0(S, \tilde{a}_i^n) \le v_0(\tilde{a}^n)(1 - p_0) + v_1(\tilde{a}^n)P(A) + v_2(\tilde{a}^n)P(A) + v_3(\tilde{a}^n)P(A) =$$

$$= \left(1 - v_1(\tilde{a}^n) - v_2(\tilde{a}^n) - v_3(\tilde{a}^n)\right)(1 - p_0) + \left(v_1(\tilde{a}^n) + v_2(\tilde{a}^n) + v_3(\tilde{a}^n)\right)P(A) =$$

$$= 1 - p_0 - (v_1(\tilde{a}^n) + v_2(\tilde{a}^n) + v_3(\tilde{a}^n))(1 - p_0 - P(A)).$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы S удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S,\tilde{a}^n) \geq p_0 + \left(v_1(\tilde{a}^n)+v_2(\tilde{a}^n)+v_3(\tilde{a}^n)\right)\left(1-p_0-P(A)\right) \geq$$

$$\geq p_0 + \left(v_1(\tilde{a}^n)+v_2(\tilde{a}^n)+v_3(\tilde{a}^n)\right)\left(1-2P(A)\right) \geq p_0,$$

поскольку $P(A) \leq 1/2$.

Аналогично проверяются три других неравенства из формулировки теоремы.

Теорема 4 доказана.

Следствие 1. $P(S) \geq \max\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

Пусть f – функция, которая принимает четыре значения: 0, 1, 2, 3. Пусть S – любая схема, реализующая функцию f, и пусть в схеме S можно выделить подсхему D, которая имеет один вход, содержит выход схемы S и реализует либо тождественную функцию y, либо $y+1 \pmod 4$, либо $y+2 \pmod 4$, либо $y+3 \pmod 4$, т.е. реализует некоторую функцию $y+j \pmod 4$, $j \in \{0,1,2,3\}$. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы D.

Будем говорить, что схема C *надежнее* схемы S (и получается из схемы S удалением подсхемы D), если выполнено неравенство $P(C) < P(S)$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – функция, которая принимает четыре значения 0, 1, 2, 3.

Схему S, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть *bc-схемой*, если из нее нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, реализующей некоторую функцию $y+j \pmod 4$, $j \in \{0,1,2,3\}$, т.е. либо тождественную функцию y, либо $y+1 \pmod 4$, либо $y+2 \pmod 4$, либо $y+3 \pmod 4$).

Обозначим через $h(\tilde{x}^n)$ функцию, которую реализует схема C, а через w_i, $i \in \{0,1,2,3\}$, – вероятность появления ошибки на выходе схемы D при поступлении на ее вход значения i. Очевидно, что $f(\tilde{x}^n) = h(\tilde{x}^n) + j \pmod 4$.

Справедлива теорема 5.

Теорема 5. Пусть схема S, ненадежность которой равна $P(S)$, реализует функцию f и является *bc-схемой*. Пусть в схеме S можно выделить подсхему D, имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую некоторую функцию $y+j \pmod 4$, $j \in \{0,1,2,3\}$, с такими вероятностями ошибок w_0, w_1, w_2, w_3, что $0 < w_0+w_1+w_2+w_3 < 1$. Тогда верно неравенство

$$\min\left\{\frac{w_i}{w_0+w_1+w_2+w_3}\right\} \leq P(S),$$

где минимум берется по $i \in \{0,1,2,3\}$.

Доказательство (от противного). Пусть для функции f выполнены условия теоремы. Без ограничения общности можно считать, что функция f зависит от n переменных $x_1,...,x_n$, т.е. $f = f(\tilde{x}^n)$. Пусть подсхема D реализует некоторую функцию $y + j$ $(j \in \{0,1,2,3\})$, а схема C, получаемая из схемы S удалением подсхемы D, реализует функцию $h(\tilde{x}^n)$. Тогда для функций $f(\tilde{x}^n)$, $h(\tilde{x}^n)$ и числа j верно равенство $h(\tilde{x}^n) + j = f(\tilde{x}^n)$.

Допустим, что утверждение теоремы неверно, тогда при всех $i \in \{0,1,2,3\}$ верно неравенство $\dfrac{w_i}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3} > P(S)$, из которого получаем соотношение

$$\frac{w_i}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3} - w_i = \frac{w_i(1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3)}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3} > P(S) - w_i.$$

Следовательно,

$$\frac{w_i}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3} > \frac{P(S) - w_i}{1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3}. \qquad (1)$$

Пусть $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S, пусть $f(\tilde{a}^n) = \tau$ и $h(\tilde{a}^n) = u$. Тогда $\tau = u + j \pmod 4$. Найдем вероятность $P_\tau(S, \tilde{a}^n)$ появления τ на выходе схемы S:

$$P_\tau(S,\tilde{a}^n) = P_u(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u) + P_{u+1}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+1) +$$
$$+P_{u+2}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+2) + P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+3) =$$
$$= P_u(C,\tilde{a}^n)(1 - w_\tau) + P_{u+1}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+1) +$$
$$+P_{u+2}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+2) + P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+3) =$$
$$= (1 - P_{u+1}(C,\tilde{a}^n) - P_{u+2}(C,\tilde{a}^n) - P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)) =$$
$$= (1 - w_\tau) + P_{u+1}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+1) + P_{u+2}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+2) +$$
$$+P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)P_\tau(D,u+3) = 1 - w_\tau + P_{u+1}(C,\tilde{a}^n)(w_\tau + P_\tau(D,u+1) - 1) +$$
$$+P_{u+2}(C,\tilde{a}^n)(w_\tau + P_\tau(D,u+2) - 1) + P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)(w_\tau + P_\tau(D,u+3) - 1).$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе схемы S равна:

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) = w_\tau + P_{u+1}(C,\tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P_\tau(D,u+1)) +$$
$$+P_{u+2}(C,\tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P_\tau(D,u+2)) + P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)(1 - w_\tau - P_\tau(D,u+3)) \geq$$
$$\geq w_\tau + (1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3)(P_{u+1}(C,\tilde{a}^n) + P_{u+2}(C,\tilde{a}^n) + P_{u+3}(C,\tilde{a}^n)) =$$
$$= w_\tau + (1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3)P(C),$$

т.е. верно неравенство

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) \geq w_\tau + (1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3)P(C). \qquad (2)$$

Из соотношения (2) следует неравенство:

$$\frac{P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3} \geq P(C). \qquad (3)$$

Учитывая (3) и (1), имеем

$$P(C) \leq \frac{P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) - w_\tau}{1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3} \leq \frac{P(S) - w_\tau}{1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3} < \frac{w_\tau}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3}.$$

Тогда

$$-P(C)(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) > -w_\tau. \qquad (4)$$

Из неравенства (2), учитывая (4), следует

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}) \geq w_\tau + P(C)(1 - w_0 - w_1 - w_2 - w_3) =$$

$$= w_\tau + P(C) - P(C)(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) > w_\tau + P(C) - w_\tau = P(C),$$

т.е. $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S,\tilde{a}^n) > P(C)$. Следовательно, $P(S) > P(C)$, что противоречит условию.

Теорема 5 доказана.

Обозначим через $K(n)$ множество таких функций четырехзначной логики, зависящих от переменных $x_1,...,x_n$ $(n \geq 3)$, что каждая из этих функций принимает все три значения 0, 1, 2, 3 и не представима ни в виде $x_k \vee h(\tilde{x}^n)$, ни в виде $x_k \,\&\, h(\tilde{x}^n)$, ($k \in \{1,2,...,n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция четырехзначной логики). Пусть $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n).$

Утверждение 1. $|K(n)| \geq 4^{4^n} - 2n4^{3\cdot 4^{n-1}} - 4\cdot 3^{4^n}$.

Доказательство. Сначала найдем число функций, представимых в виде $x_k \,\&\, h(\tilde{x}^n)$, ($k \in \{1,2,...,n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция четырехзначной логики). Для этого разложим функцию $x_k \,\&\, h(\tilde{x}^n)$ по переменной x_k, используя лемму 1:

$$x_k \,\&\, h(\tilde{x}^n) = J_0(x_k) \,\&\, 0 \,\&\, h(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n) \vee$$

$$\vee J_1(x_k) \,\&\, 1 \,\&\, h(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n) \vee$$

$$\vee J_2(x_k) \,\&\, 2 \,\&\, h(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n) \vee$$

$$\vee J_3(x_k) \,\&\, 3 \,\&\, h(x_1,...,x_{k-1},3,x_{k+1},...,x_n) =$$

$$= J_1(x_k) \,\&\, 1 \,\&\, h(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n) \vee$$

$$\vee J_2(x_k)\ \&\ 2\ \&\ h(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)\vee$$

$$\vee J_3(x_k)\ \&\ h(x_1,...,x_{k-1},3,x_{k+1},...,x_n)\,.$$

Тогда число функций, представимых в виде $x_k\ \&\ h(\tilde{x}^n)$, не больше $n4^{4^{n-1}}\cdot 4^{4^{n-1}}\cdot 4^{4^{n-1}}=n4^{3\cdot 4^{n-1}}$.

Теперь найдем число функций, представимых в виде $x_k\vee h(\tilde{x}^n)$, $k\in\{1,2,...,n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная функция четырехзначной логики. Для этого разложим функцию $x_k\vee h(\tilde{x}^n)$ по переменной x_k, используя лемму 1:

$$x_k\vee h(\tilde{x}^n)=J_0(x_k)\ \&\ [0\vee h(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)]\vee$$

$$\vee J_1(x_k)\ \&\ [1\vee h(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)]\vee$$

$$\vee J_2(x_k)\ \&\ [2\vee h(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)]\vee$$

$$\vee J_3(x_k)\ \&\ [3\vee h(x_1,...,x_{k-1},3,x_{k+1},...,x_n)]=$$

$$=J_0(x_k)\,\&\,h(x_1,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)\vee$$

$$\vee J_1(x_k)\,\&\,[1\vee h(x_1,...,x_{k-1},1,x_{k+1},...,x_n)]\vee$$

$$\vee J_2(x_k)\,\&\,[2\vee h(x_1,...,x_{k-1},2,x_{k+1},...,x_n)]\vee J_3(x_k).$$

Тогда число функций, представимых в виде $x_k\vee h(\tilde{x}^n)$, не больше, чем $n4^{4^{n-1}}\cdot 4^{4^{n-1}}\cdot 4^{4^{n-1}}=n4^{3\cdot 4^{n-1}}$.

Таким образом, число функций, представимых в виде $x_k\ \&\ h(\tilde{x}^n)$ или $x_k\vee h(\tilde{x}^n)$, не больше, чем $2n4^{3\cdot 4^{n-1}}$.

Наконец, рассмотрим функции, принимающие не больше трех значений из множества $\{0,1,2,3\}$. Очевидно, их число не больше $C_4^3\cdot 3^{4^n}=4\cdot 3^{4^n}$. Заметим, что среди этих функций содержатся все константы 0, 1, 2, 3.

Следовательно, число функций, не принадлежащих классу $K(n)$, не больше $2n4^{3\cdot 4^{n-1}}+4\cdot 3^{4^n}$. Поэтому $|K(n)|\geq 4^{4^n}-2n4^{3\cdot 4^{n-1}}-4\cdot 3^{4^n}$.

Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 следует, что класс $K(n)$ содержит почти все функции четырехзначной логики из $P_4(n)$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n4^{3\cdot 4^{n-1}}+4\cdot 3^{4^n}}{4^{4^n}}=0.$

Справедлива теорема о нижней оценке ненадежности схем, реализующих функции из класса *K*.

Теорема 6. Пусть функция $f\in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, при $\varepsilon\in(0,1/1000]$ верно неравенство $P(S)\geq 9\varepsilon-33\varepsilon^2+36\varepsilon^3$.

Доказательство. Пусть функция $f\in K$, пусть S – любая схема, реализующая f. Заметим, что схема S содержит хотя бы три элемента.

Для ненадежности $P(S)$ схемы S верно одно из двух неравенств: либо $P(S) > 9\varepsilon + 954\varepsilon^2$ (тогда утверждение теоремы верно), либо $P(S) \le 9\varepsilon + 954\varepsilon^2$.

Пусть $P(S) \le 9\varepsilon + 954\varepsilon^2$. Без ограничения общности схему S можно считать *bc-схемой* (иначе будем удалять из схемы S подсхемы, реализующие либо тождественную функцию y, либо функцию $y+1$, либо функцию $y+2$, либо функцию $y+3$, и получать более надежные схемы, реализующие функции $f + \text{const}$ до тех пор, пока не получим *bc-схему* S'', для которой и проведем дальнейшие рассуждения, заменив S на S'').

Обозначим через E_1 функциональный элемент, выход которого является выходом схемы S, и в зависимости от приписанных ему базисных функций рассмотрим следующие варианты.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\&$. Поскольку $f \in K$, входы элемента E_1 соединены не с полюсами, а с выходами некоторых элементов E_2 и E_3.

1.1. Пусть элементы E_2 и E_3 различны. Обозначим через D подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2 и E_3. Пусть входной набор схемы D таков, что при отсутствии неисправностей в схеме D на ее выходе появляется значение 3 (такой набор найдется, поскольку $f \in K$).

1.1.1. Пусть выход элемента E_2 не соединен со входом элемента E_3 и выход элемента E_3 не соединен со входом элемента E_2. Вычислим вероятность появления 3 на выходе схемы D по формуле полной вероятности и получим: $(1-3\varepsilon)^3 + 2\cdot 3\varepsilon(1-3\varepsilon)\varepsilon + (3\varepsilon)^2\varepsilon = 1 - 9\varepsilon + 33\varepsilon^2 - 36\varepsilon^3$.

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы D равна $p_3 = 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S) \ge 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

1.1.2. Пусть выход одного из элементов, например E_2, соединен со входом другого элемента E_3.

1.1.2.1. Пусть элементу E_3 приписана функция $J_3(x)$ или константа 3 (иначе значение 3 не появится на выходе схемы D), или же элементу E_3 приписана функция двух переменных ($\&$ или $\vee$) и оба входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 3 на выходе схемы D в этих случаях равна

$$(1-3\varepsilon)\left[(1-3\varepsilon)^2 + 3\varepsilon\cdot\varepsilon\right] + 3\varepsilon\cdot\varepsilon = 1 - 9\varepsilon + 33\varepsilon^2 - 36\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы D равна $p_3 = 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S) \ge 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

1.1.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция $\&$ или $\vee$, но только один из входов элемента E_3 соединен с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 3 на выходе схемы D в этих случаях равна

$$(1-3\varepsilon)\left[(1-3\varepsilon)^2+3\varepsilon\cdot\varepsilon\right]+3\varepsilon\cdot\varepsilon=1-9\varepsilon+33\varepsilon^2-36\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы D равна $p_3=9\varepsilon-33\varepsilon^2+36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S)\geq 9\varepsilon-33\varepsilon^2+36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

1.2. Пусть элементы E_2 и E_3 совпадают, т.е. оба входа элемента E_1 соединены с выходом элемента E_2. Обозначим через D подсхему, состоящую из элемента E_1. Очевидно, что схема D реализует тождественную функцию, а вероятности появления ошибок на выходе схемы D равны: $w_0=w_1=w_2=w_3=3\varepsilon$. По теореме 5 справедливо неравенство $3\varepsilon/(12\varepsilon)\leq 9\varepsilon+954\varepsilon^2$, что неверно, поскольку при $\varepsilon\leq 1/1000$ верно неравенство: $1/4>9\varepsilon>9\varepsilon+954\varepsilon^2$.

Полученное противоречие означает, что рассматриваемая схема не может быть подсхемой *bc-схемы S*.

2. Пусть элементу E_1 приписана функция $\vee$. Поскольку $f\in K$, входы элемента E_1 соединены не с полюсами, а с выходами некоторых элементов E_2 и E_3.

2.1. Пусть элементы E_2 и E_3 различны. Обозначим через D подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2 и E_3. Пусть входной набор схемы D таков, что при отсутствии неисправностей в схеме D на ее выходе появляется значение 0 (такой набор найдется, поскольку $f\in K$).

2.1.1. Пусть выход элемента E_2 не соединен со входом элемента E_3 и выход элемента E_3 не соединен со входом элемента E_2. Вычислим вероятность появления 0 на выходе схемы D по формуле полной вероятности и получим: $(1-3\varepsilon)^3+2\cdot 3\varepsilon(1-3\varepsilon)\varepsilon+(3\varepsilon)^2\varepsilon=1-9\varepsilon+33\varepsilon^2-36\varepsilon^3$. Тогда вероятность ошибки на выходе подсхемы D равна $p_0=9\varepsilon-33\varepsilon^2+36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S)\geq 9\varepsilon-33\varepsilon^2+36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

2.1.2. Пусть выход одного из элементов, например E_2, соединен со входом другого элемента E_3.

2.1.2.1. Пусть элементу E_3 приписана одна из функций $J_i(x)$, $i\in\{1,2,3\}$ или константа 0 (иначе значение 0 не появится на выходе схемы D), или же элементу E_3 приписана функция двух переменных ($\&$ или $\vee$) и оба входа элемента E_3 соединены с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 0 на выходе схемы D в этих случаях равна

$$(1-3\varepsilon)\left[(1-3\varepsilon)^2+3\varepsilon\cdot\varepsilon\right]+3\varepsilon\cdot\varepsilon=1-9\varepsilon+33\varepsilon^2-36\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы D равна $p_0 = 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

2.1.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция & или $\vee$, но только один из входов элемента E_3 соединен с выходом элемента E_2. Вероятность появления значения 0 на выходе схемы D в этих случаях равна

$$(1-3\varepsilon)\left[(1-3\varepsilon)^2 + 3\varepsilon \cdot \varepsilon\right] + 3\varepsilon \cdot \varepsilon = 1 - 9\varepsilon + 33\varepsilon^2 - 36\varepsilon^3.$$

Тогда вероятность появления ошибки на выходе подсхемы D равна $p_0 = 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$. По теореме 4 получаем неравенство $P(S) \geq 9\varepsilon - 33\varepsilon^2 + 36\varepsilon^3$, т.е. утверждение теоремы верно.

2.2. Пусть элементы E_2 и E_3 совпадают, т.е. оба входа элемента E_1 соединены с выходом элемента E_2. Обозначим через D подсхему, состоящую из элемента E_1. Очевидно, что схема D реализует тождественную функцию, а вероятности появления ошибок на выходе схемы D равны: $w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 3\varepsilon$. По теореме 5 справедливо неравенство $3\varepsilon / (12\varepsilon) \leq 9\varepsilon + 954\varepsilon^2$, что неверно, поскольку при $\varepsilon \leq 1/1000$

$$1/4 > 9\varepsilon > 9\varepsilon + 954\varepsilon^2.$$

Полученное противоречие означает, что рассматриваемая схема не может быть подсхемой *bc-схемы S*.

3. Пусть элементу E_1 приписана любая из функций $J_i(x)$ или константа j $(i, j \in \{0,1,2,3\})$. Тогда схема S реализует либо функцию, принимающую только два значения 0 и 2, либо константу j, что противоречит условию $f \in K$.

Теорема 6 доказана.

Следовательно, любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадежностью, которая асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не меньше 9ε. Это означает, что схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 3, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 9ε при $\varepsilon \to 0$.

Выводы

1. Любую функцию из P_4 можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 9ε (теорема 3).

2. Любую функцию из класса K (содержащего почти все функции из P_4) нельзя реализовать схемой с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) меньше 9ε (теорема 6).

3. Схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 3, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 9ε при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, в базисе Россера – Туркетта:

1) любую функцию четырехзначной логики можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 9ε;

2) для почти любой функции такая схема является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 9ε при $\varepsilon \to 0$.

Список литературы

1. **Васин, А. В.** О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью 5ε / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.
2. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59–74.
3. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // Fundamenta Informaticae. – 2010. – Vol. 104 (3). – P. 219–225.
4. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 52–60.
5. **Виноградов, Ю. А.** О синтезе трехзначных МДП-схем / Ю. А. Виноградов // Математические вопросы кибернетики : сб. ст. – Вып. 3. – М. : Наука, 1991. – С. 187–198.
6. **Виноградов, Ю. А.** О синтезе четырехзначных квазикомплементарных МОП-схем / Ю. А. Виноградов // Математические вопросы кибернетики : сб. ст. – Вып. 8. – М. : Наука, 1999. – С. 298–300.
7. **Алехина, М. А.** О синтезе схем из ненадежных элементов в P_4 / М. А. Алехина, С. П. Каргин // Известия высших учебных заведений. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 47–56.
8. **Барсукова, О. Ю.** Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Барсукова О. Ю. – Пенза, 2014. – 87 с.
9. **Алехина, М. А.** Оценки ненадежности схем в базисе Россера – Туркетта / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 5–19.
10. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2001. – 384 с.

References

1. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 64–79.
2. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, pp. 59–74.
3. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae*. 2010, vol. 104 (3), pp. 219–225.
4. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.

5. Vinogradov Yu. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki*: *sb. st.* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 3. Moscow: Nauka, 1991, pp. 187–198.
6. Vinogradov Yu. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki: sb. st.* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 8. Moscow: Nauka, 1999, pp. 298–300.
7. Alekhina M. A., Kargin S. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 4 (32), pp. 47–56.
8. Barsukova O. Yu. *Sintez nadezhnykh skhem, realizuyushchikh funktsii dvuznachnoy i trekhznachnoy logik: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Synthesis of reliable circuits, realizing functions of two-valued and three-valued logic: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Penza, 2014, 87 p.
9. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1 (29), pp. 5–19.
10. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Vyssh. shk., 2001, 384 p.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой дискретной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alehina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of discrete mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Каргин Степан Павлович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dm@pnzgu.ru

Kargin Stepan Pavlovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера – Туркетта в *P*$_4$ / М. А. Алехина, С. П. Каргин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 37–53.